**习题一**

1.判断下列集合对指定的运算是否构成*R*上的线性空间

（1），对矩阵加法和数乘运算；

（2），对矩阵加法和数乘运算；

（3）；对中向量加法和如下定义的数乘向量：；

（4），通常的函数加法与数乘运算。

**解：**

（1）、（2）为*R*上线性空间

（3）不是，由线性空间定义，对有1=，而题（3）中

（4）不是，若k<0，则，数乘不满足封闭性。

2.求线性空间的维数和一组基。

**解：**一组基

dim*W*=*n*(*n*+1)/2

3.如果*U*1和*U*2都是线性空间*V*的子空间，若dim*U*1=dim*U*2，而且，证明：*U*1=*U*2。

**证明**：因为dim*U*1=dim*U*2，故设

为空间*U*1的一组基，为空间*U*2的一组基

，有



而

，*C*为过渡矩阵，且可逆

于是



由此，得



又由题设，证得*U*1=*U*2。

4.设，讨论向量是否在*R*(*A*)中。

**解：**构造增广矩阵

矩阵*A*与其增广矩阵秩相同，向量可由矩阵*A*的3个列向量线性表示，在列空间*R*(*A*)中。

5.讨论线性空间*P*4[*x*]中向量，，的线性相关性。

**解：**

而

，该矩阵秩为2

所以向量组*P*1,*P*2,*P*3线性相关。

6.设，证明dim*R*(*A*)+dim*N*(*A*)=*n*。

**证明：**，

假定dim*R*(*A*)=r，且设为*R*(*A*)的一组基

则存在  ，其中不全为零

使

显然



上述*n*-*r*个向量线性无关，而，*s*<*r*不为*N*(*A*)中的向量，否则与线性无关矛盾，故

dim*N*(*A*)=*n*-*r*

所以

dim*R*(*A*)+dim*N*(*A*)=*n*

7.设，求矩阵*A*的列空间*R*(*A*)和零空间*N*(*A*)。

**解：**通过矩阵的行初等变换将矩阵*A*化为行阶梯形



矩阵*A*的秩为2，从A中选取1、2列（线性无关）作为*R*(*A*)的基，于是



由**，，rank(*A*)=2，有



分别取和，求得齐次方程**解空间的一组基



所以*A*的零空间为



8.在中，已知两组基

，，，

，，，

求基{*E*i}到基{*G*i}的过渡矩阵，并求矩阵在基{*G*i}下的坐标*X*。

**解：**

由此，得过渡矩阵



再由



解得



9.判别下列集合是否构成子空间。

（1）；

（2）；

（3）中，；

（4）。

**解：**（1）不是子空间，对加法及数乘运算不封闭。如取*k*=2，，

，而，。

（2）不是子空间，因为*W*2中没有零元。

（3）、（4）为子空间。

10.设，，，，，，求和。

**解：**设，则

且

于是，有



即 

而



取，得



所以



由于rank(*A*)=3

则 

11.在矩阵空间中，子空间

，，其中，

，求

（1）*V*1的基和维数；

（2）**和的维数。

**解：（1）**中，

令，可验证*A*1，*A*2，*A*3线性无关，它们构成空间*V*1的一组基，空间V1的维数dim*V*1=3。

（2）中，*B*1与*B*2线性无关，它们是*V*2的一组基，故dim*V*2=2，而

*V*1+*V*2 = *L*{*A*1,*A*2,*A*3} + *L*{*B*1,*B*2} = *L*{ *A*1,*A*2,*A*3,*B*1,*B*2}

在的标准基*E*11，*E*12，*E*21，*E*22下，*A*1,*A*2,*A*3,*B*1,*B*2对应的坐标*X*1,*X*2,*X*3,*X*4,*X*5排成矩阵



于是dim(*V*1+*V*2)=4，由维数定理



12.设**和为的子空间，*，*

**，证明。

**证明：**对*W*1，由，解得



显然*W*1的维数dim*W*1=*n*-1，而向量组



为*W*1的一组基。

对*W*2，由，解得



*W*2的基为，dim*W*2=1

于是



这里



所以为*W*1+*W*2的基，则dim(*W*1+*W*2)=*n*，由维数定理可知，故有



13.中，，，判别下面定义的实数是否为内积。

（1）；

（2）；

（3），其中*A*为正定矩阵。

**解：**（1）不是上的内积。设，



于是



内积的线性性不满足。

（2）与（3）是上的内积。可验证对称性、线性性及正定性都满足。

13.设是*V*5的标准正交基，又，，，求的标准正交基。

**解：***W*的标准正交基



14.在欧氏空间*R*4中，求子空间的正交补子空间*W*⊥。

**解：**设

令 

由



得



解得



所以



15.判断下列变换哪些是线性变换

（1）*R*2中，；

（2）*R*3中，；

（3）中，*A*为给定*n*阶方阵，，；

（4）中，，为*A*的伴随矩阵。

**解：**（1）不是，该变换为非线性变换

设

，

则



（2）是线性变换

（3）不是，因有

（4）是线性变换



而





16.设*R*3中，线性变换*T*为：，*i*=1,2,3，其中，，，，，，求

（1）*T*在基下的矩阵；

（2）*T*在标准正交基下的矩阵。

**解：**（1）由及

得



于是



（2）中标准基正交基

由





得



因为



故有



于是



17.设线性变换，有

，求*N*(*T*)和*R*(*T*)。

解：由，得下述齐次方程组



解得

所以



由，得



故有 

或

18.在欧氏空间*R*n中，设有两组基与，满足关系式

，

证明：（1）若与都是标准正交基，则*P*是正交阵；

（2）若是标准正交组，*P*是正交阵，则是标准正交组。

证明：（1）将矩阵*P*按列分块，有



其中



于是



故矩阵*P*为正交矩阵。

（2）与（1）证明过程类似，可证明是标准正交基。

**习题二**

1.设*A*、*B*为*n*阶方阵，是*A*的特征值，证明

（1）tr(*AB*)=tr(*BA*)；

（2）；

（3）若，则。

**证明：**（1）设，，则



（2）因为，，……，

故为的特征值，于是



（3）由结论（1），得



2.设*n*阶方阵，且，*i*=1,2,…,*n*，证明*A*的每一个特征值的绝对值。

**证明：**设有，，并设

对中第*k*个方程



于是



即有



3.设三阶方阵



的二重特征值对应有两个线性无关特征向量，

（1）求与；

（2）求，使。

**解：**（1）因齐次方程的解空间维数为2，则矩阵的秩为1

而



因

故有。

（2）

*A*的特征多项式 

特征值 ，

由，求得特征向量

由，求得特征向量

于是



且有



4.设与是的两个不同特征值，且有



证明矩阵*A*可对角化。

**证明：**设

对于有*n - r*个线性无关特征向量

对于有 *r*个线性无关特征向量

于是矩阵*A*有*n*个线性无关特征向量，所以矩阵*A*可对角化。

5.设中，，线性变换*T*



求一组基，使*T*在此基下的矩阵为对角阵，并求出此对角阵。

**解：**取中的一组标准基，则有

得线性变换*T*在基下的矩阵



*A*的特征多项式

特征值 ，

由，解得特征向量

由，解得特征向量

于是

，

矩阵*P*为从基到所求基的过渡矩阵，于是



线性变换*T*在基下的矩阵为。

6.求可逆矩阵*P*及*J*，使，其中



解：*A*的特征多项式

特征值为

再由

解得特征子空间的一组基

特征向量

由

得增广矩阵

若方程组有解（相容，），则有*k*1=*k*2。

取*k*1 = *k*2 = 1，得

由

解得广义特征向量

取

则有



7.设为函数向量生成的4维空间，*T*为导数变换，

（1）求*T*在基下的矩阵；

（2）找一组基，使*T*在此基下为Jordan标准形。

**解：**（1），于是



*T*在基下的矩阵 

（2），



线性变换*T*在基下的矩阵为

8.在多项式空间中，*T*为是的一个导数变换，证明*T*在任一基下的矩阵不可对角化。

**证明：**，于是

 

矩阵*A*的特征值为

而，故*A*仅有一个特征向量，所以*A*不可对角化。

9.设，求。

**解：**由题（6），有

，，

于是

，

取



于是



10.设*A*为*n*阶方阵，证明：

（1）若，则*A*可对角化；

（2）若，k为大于1的整整数，则*A*可对角化。

**证明：**（1）因为，则A的化零多项式

无重根，*A*的最小化零多项式可整除任意A的化零多项式，故*A*的最小多项式无重根，于是*A*可对角化。

（2）因为，得*A*的化零多项式

即



而无重根，于是*A*的最小多项式无重根，所以矩阵*A*可对角化。

**习题三**

1.设

（1）求*A*的*LDV*分解；

（2）设，用*LDV*分解求解方程组*AX*=*b*。

**解：**（1）



令，，则

这里矩阵*P*为行初等变换矩阵，

令 ， 

于是



（2）由

得 

令 ，则有



令，则有



由

即

解得



由

即

解得



再由

即

解得



2.求下列矩阵的满秩分解

 

**解：**（1）



矩阵第1列和第3列线性无关，于是满秩分解为



（2）

于是满秩分解为



3.设，**的分块为，其中，，，证明有如下形式的满秩分解

，

**证明：**因为， 矩阵*A*的前*r*个列是*A*的极大无关列，*A*的后*n* - *r*个列可由线性表示，即

，

故有





4.阵的谱分解。

解：矩阵*A*的特征多项式

对应特征值的特征向量，由下述方程求得

，即

解得特征向量

对应特征值的特征向量，由下述方程求得

，即

解得特征向量

于是  ， 

故有矩阵*A*的谱分解



5.明反对称矩阵和反Hermite矩阵的特征值为0和纯虚数。

**证明：**设，为矩阵*A*的特征值，即有









得

，所以

设，为矩阵*B*的特征值，即有









得

，令

则有 ，得

所以为纯虚数。

6.*A*与*B*为正规矩阵，证明*A*与*B*酉相似的充分必要条件是*A*与*B*的特征值相同。

**证明：**

**（1）**充分性

设*A*与*B*为正规矩阵，且特征值相同，则对*A*与*B*分别存在酉矩阵*U*1和*U*2，使





故有 

即 

所以 *A*与*B*相似

（2）必要性

设*A*与*B*相似，则有



于是



故*A*与*B*的特征值相同。

7.设

（1）证明与的非零特征值相同；

（2）设的非零特征值对应的正交特征向量为，则的特征值对应的特征向量为且它们也是正交向量组。

**证明：**（1）

取，有

因为

于是



故有



即



若，则有



所以与的非零特征值相同。

（2）设

于是



所以为的特征向量。



故特征向量组为正交向量组。

8.求下列矩阵的奇异值分解

 

**解：**（1）





特征值，奇异值为

由

 解得特征向量

 解得特征向量

由此得正交矩阵



于是

 

设

由和，得



解得

标准化后，得

奇异值分解为



（2）





特征值，奇异值为

由

 解得特征向量

 解得特征向量

由此得正交矩阵



于是

，

设

由，，得



解得

奇异值分解为



9.证明一个正规矩阵若是三角阵，则一定是对角阵。

**证明：**设矩阵为上三角阵，则有



由因矩阵*A*为正规矩阵，则有

即

矩阵第*i*行第*i*列元素为





得

所以*A*为对角阵。

10.设的奇异值是，证明。

**证明：**矩阵*A*的奇异值分解为



这里为*n*阶酉矩阵

，

于是



**习题四**

1.，，

计算：。

**解：**











2.设均为正实数，向量，证明由

定义的非负实数是*R*n空间的一个向量范数。

**证明：**

（1）正定性：，若，则有

（2）齐次性：

（3）三角不等式：





由Cauchy不等式，得



所以



故有



3.判别下列定义的实函数是否为的矩阵范数。

（1）设，定义实函数值；

（2）设，定义实函数值。

**解：**（1）取，



， ，

不满足相容性条件



（2）正定性，齐次性，三角不等式显然满足

相容性条件满足。

4.设是由向量诱导的矩阵范数，可逆，证明

（1）

（2）

**证明：**（1）由矩阵范数相容定义，有

由矩阵的诱导范数，有



所以

（2）

所以

5.证明

（1）酉矩阵*U*的谱范数等于1；

（2）设，*U*，*V*为*n*阶酉矩阵，则

。

**证明：**（1）因，于是的特征值为1

所以酉矩阵的谱范数为



（2）





6.设，求。

**解：**因为

故

故有



7.已知

（1）求证收敛；

（2）求的收敛和。

**解：（**1）幂级数的收敛半径等于1，矩阵*A*的谱半径，故矩阵幂级数

收敛

（2）由

得

所以 

8. ，求，，sin*A*。

**解：**由

*A*的特征值

由此得





对，

对，

对，

9.已知*A*2=*A*，求sin*A*。

**解：**设为*A*的特征值，为特征向量

由 

得 

因*A*2=*A*，故有

于是为矩阵*A*的化零多项式（最小多项式），且为一次银子乘积，所以*A*可对角化

即有



这里





10.求解微分方程组



**解：**



**习题五**

1.设，求

**解：**

取矩阵*A*的第1、3列构成列满秩矩阵*B*，取矩阵*F*第1、2行构成行满秩矩阵*C*





2.证明非齐次线性方程组有解的充分必要条件是。

**证明：**必要性

设有解，由得，，即有



充分性

设，则有，令，于是，故方程组有解



3.设，且的*n*个列是标准正交的，证明。

**证明：**因为矩阵*A*的*n*个列向量是标准正交的，则矩阵*A*为列满秩的矩阵，且有

于是



4.是幂等且为Hermite矩阵，证明。

**证明：**因为，且，矩阵*A*是正规阵，可酉相似对角阵，即

 ，*U*为酉矩阵，并设

于是



5.求线性方程组的最佳的最小二乘解。

**解：**

最佳最小二乘解为